УДК: 512 + 519.6

*С.К. Росошек*

# КОМПЬЮТЕРНАЯ ВИЗУАЛИЗАЦИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СТРУКТУР

*Работа выполнена финансовой государственной поддержку ведущих научных школ РФ, грант № 96-15-96095 «Исследования по комплексному анализу и алгебре»*

Излагаются идеи компьютерной визуализации абстрактных алгебраических операций и структура компьютерной программы «Visal» (визуальная алгебра). Приводятся примеры применения «Visal» для решения различных задач теории групп.

В последнее время все большее распространение находит компьютерная визуализация абстрактных математических понятий. Так, например, в [1] компьютерная визуализация теоретико-числовых понятий позволила выйти на новые подходы к решению классических проблем теории чисел. Другие примеры компьютерной визуализации математических понятий можно найти в [2–5]. В то же время для наиболее абстрактных математических понятий, например, из абстрактной алгебры, до настоящего времени не было известно об их компьютерной визуализации. В данной работе излагаются идеи, положенные в основу компьютерной программы «Visal» (visual algebra), а также различные направления ее применения.

## 1. Идеи и структуры программы

Для произвольной алгебраической операции реализованы два алгоритма визуализации. В первом алгоритме трехмерная визуализация алгебраической операции реализуется посредством дискретной функции двух аргументов и трехмерных преобразований машинной графики. Во втором алгоритме двумерная визуализация операции реализуется дискретной функцией цвета от двух аргументов.

Компьютерная программа «Visal» включает следующие разделы:

1) группы подстановок;
2) абстрактные группы;
3) аддитивные группы классов вычетов;
4) кольца классов вычетов;
5) абстрактные кольца;
6) произвольные операции.

Рассмотрим, например, раздел «произвольные операции». Здесь можно различными способами задавать алгебраические операции и находить, какие из их свойств выполняются, а какие нет. Сравнивая трехмерные и двумерные визуальные образы различных операций, можно визуально определять наличие или отсутствие тех или иных свойств алгебраической операции. В разделе «аддитивные группы классов вычетов» можно, меняя порядок группы как параметр, наблюдать, как меняется визуальный образ группы, в частности, как при вращении его появляются параллельные плоскости, причем их число достаточно сложным образом зависит от параметра.

## 2. Применения «Visal»

Наиболее разработан для применений в настоящее время раздел «группы подстановок». Здесь реализован алгоритм вычисления систем образующих групп подстановок, их подгрупп, а также реализован алгоритм совместной визуализации группы и подгруппы. Эти средства предназначены для обогащения и развития опыта работы с группой подстановок.

Вначале выбирается симметрическая группа $S_n$ для небольших $n$ (как показывает опыт работы с «Visal», возможности современных компьютеров допускают эффективную работу при $n \le 6$). Затем выбирается пара подстановок $a$, $b$ из $S_n$ и тогда на экране появляется, например, следующая информация: $ab \ne ba$, число элементов подгруппы, порожденной $a$ и $b$, равно, например, 24. Далее выбираются другие пары подстановок и накопленная информация анализируется. В частности, можно заметить, что число элементов подгрупп, порожденных различными парами подстановок, каждый раз является делителем порядка группы $S_n$. Так, в примере, приведенном выше, число 24 является делителем порядка группы $S_5$ (т.е. числа 120).

Следующий шаг – обобщение и выход на формулировку гипотезы: порядок любой подгруппы является делителем порядка группы. Заключительный шаг – доказательство теоремы Лагранжа, которое является примером логического рассуждения, основанного на интуитивной идее.

Следующий фрагмент – вычисление порядка произведения двух подстановок. Первый шаг – вычисление порядка подстановки. Это может быть сделано двумя способами. Первое, что напрашивается сделать, это шаг за шагом вычислять степени подстановки до тех пор, пока не получится тождественная подстановка. Но, испытав этот способ на нескольких подстановках, можно убедиться, что он малоэффективен и необходим другой способ. Если заметить аналогию между разложением подстановки на множители и разложением натурального числа на простые множители, то можно прийти к идее разложения подстановки в произведение независимых циклов.

Следующий шаг – вычисление порядка цикла. Можно сначала убедиться на примерах, а затем строго доказать, что порядок цикла равен его длине. Отсюда один шаг до идеи вычисления наименьшего общего кратного длин независимых циклов, используя аналогию с вычислением наименьшего общего кратного двух чисел, использующим разложения чисел в произведение степеней простых множителей. Теперь студенты могут сами предложить способ вычисления порядка произведения двух подстановок:

1) найти произведение подстановок;
2) разложить полученную подстановку в произведение независимых циклов;
3) найти наименьшее общее кратное длин независимых циклов.

Следующий шаг: как найти порядок произведения подстановок, не вычисляя это произведение? Из предыдущего опыта вычисления порядка произведения подстановок студенты могут заметить, что возможны два случая:

а) порядок произведения подстановок равен наимень-шему общему кратному порядков подстановок;

б) случай а) не имеет места.

Пытаясь найти объяснение случаю а), студенты могут заметить, что он реализуется тогда, когда подстановки коммутируют. В то же время, если подстановки не коммутируют, то можно заметить, что ничего определенного о порядке произведения сказать нельзя. Используя свой опыт работы в группе подстановок, студенты могут обобщить его на произвольные группы. А именно, они могут сформулировать и доказать следующее утверждение: если два элемента произвольной группы коммутируют, то порядок их произ-ведения равен наименьшему общему кратному порядков элементов; если же элементы не коммутируют, то ничего определенного о порядке произведения сказать нельзя.

Следующий фрагмент относится к изоморфизму групп. Как известно, проблема изоморфизма групп алгоритмически неразрешима. С помощью компьютерной программы «Visal» можно рассмотреть эту проблему как задачу распознавания визуальных образов.

Например, рассмотрим две группы: циклическую группу порядка 4, которая рассматривается как подгруппа симметрической группы пятой степени, порожденная циклом длины 4 и четвертую группу Клейна, рассматриваемую как подгруппу симметрической группы пятой степени, порожденная двумя циклами длины два. Сравнение визуальных образов этих групп ведет к гипотезе, что они не изоморфны. Логическое обоснование этой гипотезы может быть получено сравнением порядков элементов вышеупомянутых групп. В то же время рассмотрение визуальных образов циклической группы перестановок порядка 4 и аддитивной группы классов вычетов по модулю 4 ведет к гипотезе, что эти группы изоморфны.

Можно предложить еще несколько фрагментов из теории групп согласно следующей схемы: визуальные образы – интуитивные идеи – логическое обоснование. Для расширения рассматриваемого круга проблем мы предполагаем ввести в программу «Visal» такие темы, как «нормальные подгруппы», «нормализаторы и централизаторы подмножеств», «фактор-группы» и другие.

В заключение – несколько слов о перспективах применения компьютерной программы «Visal». Во-первых, она может применяться для компьютерной поддержки преподавания абстрактной алгебры на механико-математических факультетах университетов, особенно на первом курсе, где, как показывает опыт преподавания, студенты испытывают большие трудности. Во-вторых, возможно применение этой программы для научно-исследовательской работы студентов на старших курсах, в частности, для развития интуиции студентов через визуальные образы абстрактных алгебраических понятий и вызванные ими интуитивные идеи. В третьих, возможно применение «Visal» для компьютерной поддержки курса теории групп на физических и химических факультетах университетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зенкин А.А.* Когнитивная компьютерная графика. М.: Наука, 1991. 192 с.
2. *Фоменко А.Т.* Топологические вариационные задачи. М.: Изд-во МГУ, 1984. 427 с.
3. *Фоменко А.Т.* О наглядном изображении математических понятий. // Химия и жизнь. 1981. № 11. С. 84–89.
4. *Bickford S.* The new revolution: graphics workstation // Computer pictures, 1988, № 2, P. 45–51.
5. *Schultz B.* Scientific visualization: transforming numbers into computer pictures // Computer pictures, 1988, № 1, P. 11–16.

Статья представлена кафедрой алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета, поступила в научную редакционную коллегию «Математика» 20 ноября 1998 г.